

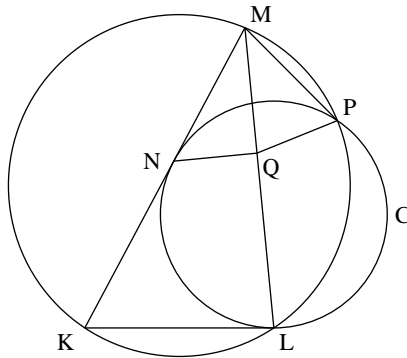
آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که داشته باشیم: $x^2 + y = 4y^2 + x$ ، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

۲. فرض کنید KN و KL بر دایره‌ی C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه‌ی دیگر تقاطع دایره‌ی C با دایره‌ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = 2\angle KML$.



۳. یک جدول $n \times n$ از اعداد 0 ، $+1$ و -1 داریم به طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد $+1$ و یک عدد -1 وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جابه‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای $+1$ ها را با -1 ها عوض کرد.

۴. فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4 چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 \geq \max \left\{ \sum_{i=1}^4 x_i, \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i} \right\}$$

$\max\{a, b\}$ یعنی بزرگترین عضو مجموعه‌ی $\{a, b\}$.

۵. در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط F و E قطع کنند. ثابت کنید: اگر $BE = CF$ ، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.