راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. به آسانی می‌توان ثابت کرد که نابرابری داده شده معادل است با

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c) > \circ$$

اگر این رابطه برقرار باشد، بدون کم شدن از کلیت مسأله فرض کنید $a \leq b \leq c$. در این‌صورت، جمله‌های دوم، سوم و چهارم مثبت‌اند. بنابراین جمله‌ی اول نیز باید مثبت باشد. یعنی $a+b > c$ و این همان نابرابری مثلث است. دو نابرابری دیگر مثلث نیز به روشنی برقرارند.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم. اگر a، b، c و d عددهایی طبیعی باشند به‌طوری که $ab = cd$، آنگاه عددهای طبیعی x، y، z و t وجود دارند که

$$a = xy, \quad b = zt, \quad c = xz, \quad d = yt$$

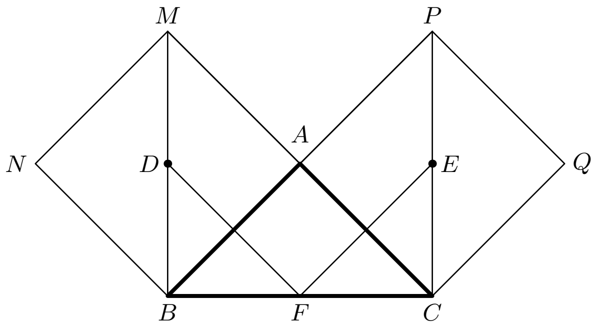
برهان. فرض کنید که $x = (a, c)$ (که در این‌جا (m, n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n را نشان می‌دهد). فرض کنید $a = xa'$ و $c = xc'$. در این‌صورت، $a'b = c'd$. چون $a'|a'b$ پس $a'|c'd$ و چون $(a', c') = ۱$ پس $a'|d$. بنابراین، $d = a'u$. به دلیل مشابه $b = c'v$ و با جایگذاری در معادله نتیجه می‌شود $u = v$. حال کافی است قرار دهیم $y = a'$، $z = c'$ و $t = u = v$.$\square$

حال بنابر لم بالا،

$$a+b+c+d = xy+zt+xz+yt = (x+t)(y+z)$$

و بنابراین، S عددی مرکب است.

۳. برای اثبات، دو مربع $AMNB$ و $APQC$ را روی اضلاع AB و AC بنا می‌کنیم.



واضح است که E و F مراکز این دو مربع‌اند. حال دو مثلث ABP و ACM را درنظر می‌گیریم. روشن است که

$$AB = AM, \quad AC = AP, \quad \angle MAC = \angle BAP$$

پس این دو مثلث مساوی‌اند. بنابراین $BP = MC$.

با توجه به اینکه $AM \perp AB$ و $AP \perp AC$، روشن است که مثلث ABP از دوران مثلث AMC به اندازه‌ی ۹۰° به‌دست می‌آید. بنابراین $MC \perp BP$.

روشن است که FE وسطهای دو ضلع مثلث BCP را به هم وصل کرده است بنابراین EF موازی BP و برابر نصف آن است. به دلیل مشابه FD نیز موازی MC و برابر نصف آن است. چون BP و MC مساوی و عمود بر هم‌اند، نتیجه می‌شود که DF و FE نیز برابر و بر هم عمودند و این حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴. فرض کنید که $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n نقاط قرمز و $B_۱$، $B_۲$، ... و B_n نقاط آبی را نمایش دهند. نقطه‌ی دلخواه O را روی این خط انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $a_i = |OA_i|$ و $b_i = |OB_i|$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که

$$a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$$

و

$$b_۱ \leq b_۲ \leq \cdots \leq b_n$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} |a_i - a_j| + \sum_{i<j} |b_i - b_j| &= \sum_{i<j} (a_j - a_i) + \sum_{i<j} (b_j - b_i) \\
&= \sum_{i<j} (a_j - b_i) + \sum_{i<j} (b_j - a_i) \\
&\leq \sum_{i<j} |a_j - b_i| + \sum_{i<j} |b_j - a_j| \\
&\leq \sum_{i,j} |a_i - b_j|.
\end{aligned}$$

و این دقیقاً همان حکم مسأله است.

یادداشت. اگر نقاط را به‌جای اینکه روی خط بگیریم، در یک فضای nـ بعدی اقلیدسی نیز درنظر بگیریم، کماکان حکم مسأله درست خواهد بود. این مطلب با به‌کار بستن قضیه‌ی لوی برای این حالت خاص مسأله که بررسی کردیم نتیجه می‌شود. این قضیه را بیان می‌کنیم

قضیه. فرض کنید که

$$(۱ \leq i \leq p, ۱ \leq j \leq r)a_{ij}, \quad (۱ \leq i \leq q, ۱ \leq j \leq r)b_{ij}$$

اعدادی حقیقی و دلخواه باشند. اگر نابرابری

$$\sum_{i=۱}^{p}\left|\sum_{j=۱}^{r} a_{ij}v_j\right| \leq \sum_{i=۱}^{q}\left|\sum_{j=۱}^{r} b_{ij}v_j\right|$$

برای مقادیر حقیقی $(۱ \leq j \leq r)v_j$ درست باشد، آنگاه این نابرابری برای بردارهای یک فضای ضرب داخلی حقیقی (مانند $\mathbb{R}^n$) نیز برقرار خواهد ماند.