راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲

تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید که $a = \sqrt{۴ + \sqrt{۱۵}}$. در این‌صورت روشن است که

$$\sqrt{۴ - \sqrt{۱۵}} = \frac{\sqrt{\left(۴ - \sqrt{۱۵}\right)\left(۴ + \sqrt{۱۵}\right)}}{\sqrt{۴ + \sqrt{۱۵}}} = \frac{۱}{a}$$

پس صورت مسأله به معادله‌ی $a^x + a^{-x} = ۸$ تبدیل می‌شود. بنابراین،

$$a^x - ۸ + a^{-x} = ۰ \Rightarrow (a^x)^۲ - ۸a^x + ۱ = ۰ \Rightarrow a^x = ۴ \pm \sqrt{۱۵}$$

که دارای جوابهای $x = ۱$ و $x = -۱$ است.

راه حل دوم: از طرف دیگر، فرض کنید $a^{-x} + a^x = a^{-y} + a^y$. محاسبه‌ی ساده‌ای نشان می‌دهد که $(a^x - a^y)(a^x a^y - ۱) = ۰$. پس یا $x = y$ و یا $x = -y$. پس معادله جواب دیگری ندارد.

۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
باید باقیمانده‌ی تقسیم عدد $a = ۲۳^{۲۳} - ۱۷^{۱۷}$ را بر ۱۰ پیدا کنیم. توجه کنید که $۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۳$ و $-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۳^۲$. پس

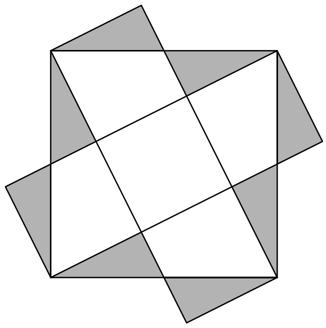
$$۲۳^{۲۳} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۱۱} \times ۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۳$$

همچنین، $-۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۷$ و $-۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۷^۲$. پس

$$۱۷^{۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^۸ \times -۳ \overset{۱۰}{\equiv} -۳$$

پس $a \overset{۱۰}{\equiv} -۳ + ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ و بنابراین، رقم سمت راست a صفر است.

۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر به شکل زیر دقت کنید، خواهید دید که همه‌ی مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی نشان داده شده با هم برابرند.



همچنین اگر در مربع اصلی به‌جای مثلثهای درونی مثلثهای بیرونی را جایگزین کنیم به پنج مربع که هر یک با مربع کوچکتر همنهشت‌اند می‌رسیم. پس اگر مساحت مربع کوچک برابر S باشد، آنگاه $5S = 1$ و بنابراین $S = \frac{1}{5}$.

۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
ابتدا دقت کنید که اگر اعداد ۲، ۳، . . . و ۳۷ را حذف کنیم، در مجموعه‌ی باقی‌مانده هیچ عضوی حاصل‌ضرب دو عضو دیگر نخواهد بود زیرا به‌ازای هر دوعضو مجموعه‌ی باقی‌مانده مانند a و b چون $a, b \geq 38$ پس $ab \geq 38^2 > 1375$.

از طرف دیگر نشان می‌دهیم که گزینه (الف) نادرست است. ابتدا توجه کنید که اگر a عددی طبیعی باشد و $2 \leq a \leq 37$، آنگاه از بین a و a^2 دست کم یکی باید حذف شود. حال اگر همه‌ی زوجهای (a, a^2) را که $2 \leq a \leq 37$ و a مربع کامل نیست درنظر بگیریم، از هر زوج مرتب دست‌کم یک مؤلفه باید حذف شود و اعداد حذف شده دوبه‌دو متمایزند. چون تعداد اعدادی مانند a با خاصیت بالا برابر ۳۲ است، پس دست کم ۳۲ عضو باید حذف شوند.

۵. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید $S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ برابر عدد $\overline{aaa} = 111a$ شود. با توجه به این که $111 = 3 \times 37$، پس $37 | n(n+1)$ و چون ۳۷ عددی اول است، n یا $n + 1$ باید بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. اما چون $\frac{n(n+1)}{2} < 1000$ پس $n < 50$. پس $n = 36$ یا $n = 37$ و یک بررسی ساده نشان می‌دهد که تنها $n = 36$ قابل‌قبول است.

۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.
ابتدا توجه کنید که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ($\angle C = 90^\circ$) ویژگی مورد نظر برقرار است. حال فرض کنید که $\angle C > 90^\circ$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} AB^2 &= c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C > a^2 + b^2 \geq 2ab > 2ab\sin C \\ &= 4S = \frac{4AB \cdot CH}{2} \end{aligned}$$

پس $2CH < AB$ که خلاف فرض است.

۷. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
ابتدا توجه کنید که انتخاب سه وزنه که وزن هر کدام ۱۰ کیلوگرم است، نشان می‌دهد که مجموع وزن وزنه‌ها می‌تواند برابر ۳۰ کیلوگرم باشد. ثابت می‌کنیم که این حداکثر ممکن است. فرض کنید $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ وزن وزنه‌ها را نشان دهد. k را کوچکترین عدد طبیعی بگیرید که $w_1 + \cdots + w_k > 10$. پس چون $w_1 + \cdots + w_{k-1} \leq 10$ داریم،

$$10 < w_1 + \cdots + w_k \leq 20$$

پس بنابر فرض مسأله $w_{k+۱}+\cdots+w_n \le ۱۰$ و درنتیجه،

$$w_۱+\cdots+w_n \le ۲۰+۱۰=۳۰$$

۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید $a=\overline{SIX}$ و $b=\overline{NINE}$. چون $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}$ و همچنین می‌دانیم که $b<۲۰۰۰$ پس $N=۱$. پس $I\neq ۱$. حال بازه‌های $[۱۲۱۰,۱۲۱۹]$، $[۱۳۱۰,۱۳۱۹]$، $\ldots$، $[۱۵۱۰,۱۵۱۹]$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به گزینه‌ها، b در یکی از این بازه‌ها قرار دارد. اگر مثلاً $۱۲۱۰\le b\le ۱۲۱۹$، آنگاه با توجه به $a=\frac{۲}{۳}b$ داریم $۸۰۶\le a\le ۸۱۲$ و چون هیچ یک از اعضای این بازه رقم دهگانشان ۲ نیست، پس از اینجا جوابی پیدا نمی‌شود. اگر $۱۳۱۰\le b\le ۱۳۱۹$، به‌طور مشابه جوابی پیدا نمی‌شود. اما اگر $۱۴۱۰\le b\le ۱۴۱۹$ نتیجه می‌شود که $۹۴۰\le a\le ۹۴۶$.

از اینجا مثلاً جوابهای $a=۹۴۲$، $b=۱۴۱۳$ به‌دست می‌آید. پس $I=۴$.

۹. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که رابطه‌ی داده شده معادل است با

$$x+\sqrt{۱+x^۲}=\frac{۱}{\sqrt{y^۲+۱}+y}=\sqrt{y^۲+۱}-y$$

پس،

$$\begin{aligned}
x+y &= \sqrt{y^۲+۱}-\sqrt{x^۲+۱}\\
(x+y)^۲ &= y^۲+۱+x^۲+۱-\sqrt{(x^۲+۱)(y^۲+۱)}\\
\sqrt{(x^۲+۱)(y^۲+۱)} &= ۱-xy\\
(x^۲+۱)(y^۲+۱) &= ۱+x^۲y^۲-۲xy\\
x^۲y^۲+x^۲+y^۲+۱ &= ۱+x^۲y^۲-۲xy
\end{aligned}$$

درنتیجه، داریم $x^۲+y^۲+۲xy=۰$؛ یعنی $x+y=۰$. برعکس اگر $y=-x$، عبارت

$$\left(\sqrt{۱+x^۲}\right)\left(y+\sqrt{۱+y^۲}\right)$$

برابر

$$\left(\sqrt{۱+x^۲}+x\right)\left(\sqrt{۱+x^۲}-x\right)$$

خواهد بود که عبارت فوق نیز برابر ۱ است.

۱۰. این مسأله نادرست است.
ثابت می‌کنیم گزینه‌های (الف) و (ب) درست‌اند در حالی که گزینه‌ی (ج) نادرست است. توجه کنید که تابع $f_\alpha(x)=x^\alpha$ به‌ازای $x>۰$، بسته به اینکه α مثبت یا منفی باشد، تابعی صعودی یا نزولی است. پس اگر $a\ge b$، $f_{a-b}(x)$ صعودی است و درنتیجه،

$$\frac{a^ab^b}{b^aa^b}=f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)\ge f(۱)=۱$$

و اگر $a \leq b$، $f_{a-b}(x)$ نزولی است و درنتیجه،

$$\frac{a^a b^b}{b^a a^b} = f_{a-b}\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(۱) = ۱$$

و در هر حال گزینه‌ی (الف) درست است. در گزینه (ب) فرض کنید $a \leq b$. در این‌صورت،

$$a^\alpha b^{۱-\alpha} = f_\alpha(a) b^{۱-\alpha} \leq f_\alpha(b) b^{۱-\alpha} = b^\alpha b^{۱-\alpha} = b < a+b$$

اگر $a \geq b$، باز هم با استدلال مشابهی می‌توانید نشان دهید که $a^\alpha b^{۱-\alpha} > a+b$ و در هر حال، گزینه‌ی (ب) درست است.

اما گزینه‌ی (ج) نادرست است. فرض کنید $a = b$. در این‌صورت حکم این گزینه تبدیل می‌شود به

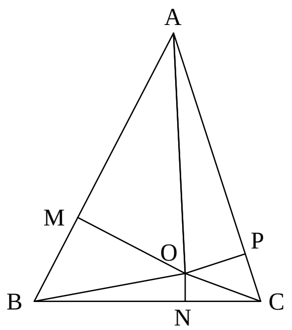
$$a^{۲a} \geq (a^۲)^{\frac{۲a+۱}{۴}}$$

یا

$$a^{۲a} \geq a^a a^{\frac{۱}{۲}}$$

که هم‌ارز است با $a^a \geq a^{\frac{۱}{۲}}$. اما اگر $\frac{۱}{۲} < a < ۱$ آنگاه، چون $۰ < a < ۱$ و $a - \frac{۱}{۲} > ۰$ نتیجه می‌شود $a^{a-\frac{۱}{۲}} < ۱$ و بنابراین $a^a < a^{\frac{۱}{۲}}$.

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.



بنابر قضیه‌ی فیثاغورس،

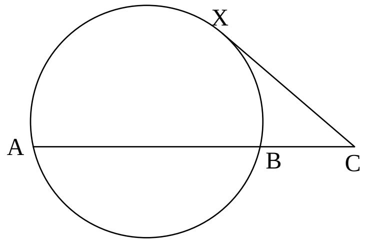
$$\begin{aligned} AM^۲ + OM^۲ &= OA^۲ = AP^۲ + OP^۲ \\ CP^۲ + OP^۲ &= OC^۲ = CN^۲ + ON^۲ \\ BN^۲ + ON^۲ &= OB^۲ = BM^۲ + OM^۲ \end{aligned}$$

اگر این سه رابطه را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود

$$AM^۲ + CP^۲ + BN^۲ = AP^۲ + CN^۲ + BM^۲$$

اگر مقادیر داده شده را در رابطه‌ی بالا جایگذاری کنیم مقدار $AP = ۲\sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید.

۱۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
اگر X نقطه‌ی تماس یکی از مماسها با دایره باشد،



بنابر قضیه‌ی قوت نقطه،

$$CX^{۲} = CA \cdot CB$$

پس CX مقداری ثابت است. بنابراین X روی یک دایره تغییر می‌کند. از طرف دیگر، اگر X نقطه‌ای باشد که $CX^{۲} = CA.CB$ و X روی خط AB نباشد دایره‌ای از سه‌نقطه A، B و X می‌گذرد و خط CX بر این دایره مماس است. اما اگر X روی خط AB باشد، به روشنی چنین دایره‌ای وجود ندارد پس مکان هندسی X دایره‌ای است به مرکز C و شعاع $CA \cdot CB$ که دو نقطه‌ی تقاطع آن با خط AB حذف شده‌اند.

۱۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که $(x, y) = (۳, ۲)$ و $(x, y) = (۱, ۱)$ جوابهای مسأله‌اند. ادعا می‌کنیم که مسأله جواب دیگری ندارد. اگر $x \geq ۳$، آنگاه

$$۳^y = ۲^x + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۱$$

پس y باید زوج باشد. در واقع اگر $y = ۲z + ۱$ آن‌گاه

$$۳^y = ۳^{۲z+۱} = ۹^z \times ۳ \overset{۸}{\equiv} ۳$$

پس فرض کنید $y = ۲z$. درنتیجه،

$$۲^x = ۳^{۲z} - ۱ = (۳^z - ۱)(۳^z + ۱)$$

پس $۳^z - ۱$ و $۳^z + ۱$ دو توان ۲ هستند که اختلاف آنها ۲ است. پس $۳^z = ۳$ و بنابراین، $z = ۱$. نتیجه می‌شود $(x, y) = (۳, ۲)$. پس تنها جوابهای معادله $(x, y) = (۱, ۱)$ و $(x, y) = (۳, ۲)$ هستند.

۱۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
قانون سینوسها را در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin \angle BDA}{\sin \angle BDA} = \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}$$

پس بنابر فرض مسأله،

$$\frac{\sin ۳x}{\sin ۲x} = \sqrt{۲}$$

به آسانی نتیجه می‌شود که تنها جواب این معادله $x = ۱۵^\circ$ است.

۱۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را d فرض کنید. چون

$$\frac{a+۱}{b}+\frac{b+۱}{a}=\frac{a^۲+b^۲+a+b}{ab}$$

عددی طبیعی است، پس عبارت $a^۲+b^۲+a+b$ بر ab بخش‌پذیر است. پس $(a+b)^۲+a+b$ نیز بر ab بخش‌پذیر است. یعنی ab عبارت $(a+b)(a+b+۱)$ را می‌شمارد. دقت کنید که چون ab بر $d^۲$ بخش‌پذیر است، پس

$$d^۲|(a+b)(a+b+۱)$$

اما $a+b+۱$ به‌صورت $dk+۱$ است و بنابراین، نسبت به d اول است. پس $d^۲|a+b$. یعنی $d^۲\leq a+b$ که گزینه‌ی (الف) یعنی $d\leq\sqrt{a+b}$ را نتیجه می‌دهد. انتخاب $a=۳$ و $b=۶$ نشان می‌دهد که گزینه‌های (د) و (ه) نادرست‌اند. همچنین روشن است که به‌ازای هر $a,b\geq ۰$،

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{\frac{۲(a^۲+b^۲)}{a+b}}\leq\sqrt{\frac{۳(a^۲+b^۲)}{a+b}}$$

۱۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر $\alpha=x+۲$، آنگاه

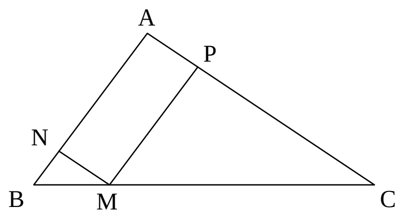
$$\alpha^۳-۶\alpha^۲+۱۳\alpha=(x+۲)^۳-۶(x+۲)^۲+۱۳(x+۲)=x^۳+x+۱۰$$

پس $x^۳+x=-۹$. همچنین اگر $\beta=y+۲$، با محاسبه‌ی مشابهی نتیجه می‌شود $y^۳+y=۹$. اما می‌دانیم که تابع $f(t)=t^۳+t$ تابعی اکیداً صعودی و فرد است. پس چون $f(x)=-f(y)$ نتیجه می‌شود $x+y=۰$ و بنابراین،

$$\alpha+\beta=x+y+۴=۴$$

۱۷. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
فرض کنید a عددی متعادل و سه رقمی باشد. (توجه کنید که هر عدد متعادل دو رقمی به‌صورت $a=\overline{xx}$ است و بنابراین $a+۱$ متعادل نیست). مجموع رقمهای هر عدد متعادل زوج است. پس برای اینکه $a+۱$ هم متعادل باشد، رقم سمت راست a باید ۹ باشد. فرض کنید $a=\overline{xy۹}$. روشن است که باید رابطه‌ی $x+y=۹$ برقرار باشد. پس تنها عددهای متعادل سه رقمی ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹، ۴۵۹، ۵۴۹، ۶۳۹، ۷۴۹، ۸۴۹ و ۹۰۹ هستند. اما اگر a یکی از چهار عدد ۱۸۹، ۲۷۹، ۳۶۹ یا ۴۵۹ باشد $a+۱$ متعادل نیست. پس کوچکترین عدد متعادل مانند a که $a+۱$ هم متعادل باشد ۵۴۹ است.

۱۸. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $x=\frac{BM}{BC}$. در این‌صورت، $\frac{CM}{BC}=۱-x$. مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان می‌دهیم.



فرض کنید خطهای رسم شده از M ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب در N و P قطع کنند. در این‌صورت،

$$\begin{array}{rcl} [BMN] & = & x^۲\,[ABC] \\ [CMP] & = & (۱-x)^۲\,[ABC] \end{array}$$

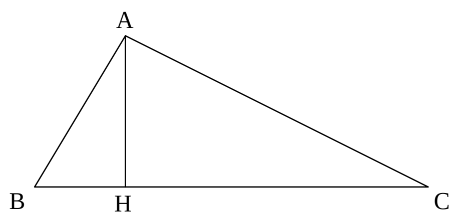
بنابراین،

$$\begin{array}{rcl} (x^۲+(۱-x)^۲)\,[ABC] & = & ([BMN]+[CMP]) \\ & = & \left(۱-\frac{۵}{۱۸}\right)[ABC] \end{array}$$

نتیجه می‌شود $۲x^۲-۲x+\frac{۵}{۱۸}=۰$. جوابهای این معادله $x=\frac{۱}{۶}$ و $x=\frac{۵}{۶}$ هستند. پس M ضلع BC را به نسبت ۱ به ۵ تقسیم می‌کند.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
فرض کنید که a_n تعداد ناحیه‌هایی را نشان دهد که توسط n صفحه که هیچ سه‌تایی از آنها در یک قطر کره مشترک نیستند، در کره به‌وجود می‌آید. روشن است که $a_۱=۲$ و $a_۲=۴$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+۱}=a_n+۲n$. فرض کنید که صفحه‌های $\pi_۱$، $\pi_۲$، ... و π_n کره را به a_n ناحیه قسمت کرده باشند. اشتراک صفحه‌ی $\pi_{n+۱}$ با هر یک از این صفحه‌ها یک خط است که قطری از کره را در بر دارد. و بنابر فرض مسأله، این n خط که آنها را $l_۱$، $l_۲$، ... و l_n می‌نامیم دوبه‌دو متمایزند. روشن است که به‌ازای هر یک از این خطها دو ناحیه‌ی جدید به‌وجود می‌آید. پس $۲n$ ناحیه‌ی جدید افزوده می‌شوند و بنابراین، $a_{n+۱}=a_n+۲n$. اکنون به استقرا روی n می‌توان ثابت کرد که $a_n=n^۲-n+۲$. پس $a_۹=۷۴$.

۲۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اضلاع مثلث قائم الزاویه را با a، b و c نشان می‌دهیم.



روشن است که مثلثهای ABH و ACH با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها نیز به‌ترتیب برابر $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ است. پس اگر شعاع دایره‌های محاطی آنها را به‌ترتیب با $r_۱$ و $r_۲$ نشان دهیم، آنگاه

$$r_۱=\frac{c}{a}r,\quad r_۲=\frac{b}{a}r$$

پس،

$$r_۱^۲+r_۲^۲=\frac{b^۲+c^۲}{a^۲}r^۲=r^۲$$

درنتیجه، $r=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲}$ یا $r=\sqrt{۱۰}$.

۲۱. گزینه (ج) صحیح است.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}|f(۰)| &= |c| \le ۱\\ \left|f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)\right| &= \left|\tfrac{a}{۴}+\tfrac{b}{۲}+c\right| \le ۱\\ |f(۱)| &= |a+b+c| \le ۱\end{aligned}$$

پس،

$$\begin{aligned}&\left|c-۴\left(\tfrac{a}{۴}+\tfrac{b}{۲}+c\right)+۳(a+b+c)\right|\\ &\qquad = \left|f(۰)-۴f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)+۳f(۱)\right|\\ &\qquad \le |f(۰)|+۴\left|f\left(\tfrac{۱}{۲}\right)\right|+۳|f(۱)|\\ &\qquad \le ۸\end{aligned}$$

اما

$$\left|c-۴\left(\frac{a}{۴}+\frac{b}{۲}+c\right)+۳(a+b+c)\right| = |۲a+b|$$

پس $۸ > |۲a+b|$. پس ۸ کران بالایی برای $|۲a+b|$ است و مثال

$$f(x) = ۸x^۲ - ۸x + ۱$$

نشان می‌دهد که ۸ ماکزیمم مقدار $۲a+b$ است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $f(x)=\sqrt[۳]{۲+x}+\sqrt[۳]{۲-x}$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x)\le ۲\sqrt[۳]{۲}$. برای اثبات کافی است ماکزیمم f را پیدا کنیم. معادله‌ی $f'(x)=۰$ تبدیل می‌شود به،

$$\frac{۱}{۳}(۲+x)^{-\frac{۲}{۳}} - \frac{۱}{۳}(۲-x)^{-\frac{۲}{۳}} = ۰$$

که دارای جواب $x=۰$ است و چون $f(۰)=۲\sqrt[۳]{۲}$ نتیجه می‌شود که ماکزیمم f مقدار $۲\sqrt[۳]{۲}$ است. اکنون چون $۳ > ۲\sqrt[۳]{۲}$، کافی است جواب معادله‌های

$$(۲+x)^{\frac{۱}{۳}} + (۲-x)^{\frac{۱}{۳}} = n$$

را به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ پیدا کنیم. اگر قرار دهیم $y^۳=x+۲$، نتیجه می‌شود $۲-x=۴-y^۳$ و بنابراین،

$$y + (۴-y^۳)^{\frac{۱}{۳}} = n$$

یا

$$\begin{aligned}۴-y^۳ &= (n-y)^۳\\ &= n^۳-۳n^۲y+۳ny^۲-y^۳\end{aligned}$$

پس $۳ny^۲-۳n^۲y+n^۳-۴=۰$. جوابهای این معادله عبارت‌اند از

$$y = \frac{۳n^۲ \pm \sqrt{۹n^۴-۱۲n(n^۳-۴)}}{۶n}$$

است. به‌ازای $n = ۱$، جواب مثبت معادله $y = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است و به‌ازای $n = ۲$ معادله‌ی

$$x = y^۳ - ۲ = \sqrt{۵}$$

دو جواب مثبت مانند $y_۱$ و $y_۲$ دارد به‌طوری‌که $y_۱ y_۲ = \frac{۲}{۳}$ و $y_۱ + y_۲ = ۲$. به آسانی می‌توان ثابت کرد که $y_۱^۳ + y_۲^۳ = ۴$ و بنابراین $x_۱ + x_۲ = ۰$.

۲۳. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
سه نقطه‌ی $P = (۰, ۰)$، $Q = (۱, ۰)$ و $R = (\sqrt[۴]{۲}, ۰)$ را درنظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هیچ نقطه‌ای در صفحه وجود ندارد که فاصله‌ی آن از هر سه نقطه‌ی P و Q و R عددی گویا باشد. فرض کنید $X = (x, y)$ چنین نقطه‌ای باشد. اگر

$$\begin{aligned} a &= x^۲ + y^۲, \\ b &= (x-۱)^۲ + y^۲ \\ &= a + ۱ - ۲x, \\ c &= (x - \sqrt[۴]{۲})^۲ + y^۲ \\ &= a + \sqrt{۲} - ۲x\sqrt[۴]{۲} \end{aligned}$$

آنگاه a، b و c باید اعدادی گویا باشند. پس $۲x - ۱$ و $۲x\sqrt[۴]{۲} - \sqrt{۲}$ اعدادی گویا هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که x گویاست. اما در این‌صورت $۲x\sqrt[۴]{۲} - \sqrt{۲}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. پس سه نقطه‌ی P، Q و R دارای خاصیت مورد نظر مسأله‌اند.

توجه کنید که هیچ دو نقطه‌ای مانند A و B نمی‌توانند منظور ما را برآورده کنند. فرض کنید R عددی گویا بزرگ‌تر از نصف فاصله‌ی A و B باشد. در این‌صورت دایره‌های به شعاع R و به مرکزهای A و B یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. فاصله‌ی P از A و B گویاست.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که

$$f(۱-x) = \frac{۴^{۱-x}}{۴^{۱-x} + ۲} = \frac{۴}{۴ + ۲ \times ۴^x} = \frac{۲}{۴^x + ۲}$$

پس،

$$f(x) + f(۱-x) = \frac{۴^x + ۲}{۴^x + ۲} = ۱$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۲S &= \left[f\left(\tfrac{۱}{۱۴}\right) + f\left(\tfrac{۱۳}{۱۴}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\tfrac{۱۳}{۱۴}\right) + f\left(\tfrac{۱}{۱۴}\right)\right] \\ &= \overbrace{۱ + \cdots + ۱}^{\text{۱۳ بار}} \\ &= ۱۳ \end{aligned}$$

پس $S = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که اگر a عددی با خاصیت مورد نظر مسأله باشد، a به پیمانه‌ی ۹ با عدد $۰+۱+\cdots+۹ = ۴۵$ همنهشت است. پس a بر ۹ بخش‌پذیر است. همچنین $۴۵ \leq a \leq ۹۹$. پس حداکثر ۷ مقدار برای a وجود دارد. به‌سادگی می‌توان دید که همه‌ی اعداد ۴۵، ۵۴، . . . و ۹۹ خاصیت مورد نظر را دارند. پس دقیقاً ۷ مقدار برای a وجود دارد.