راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

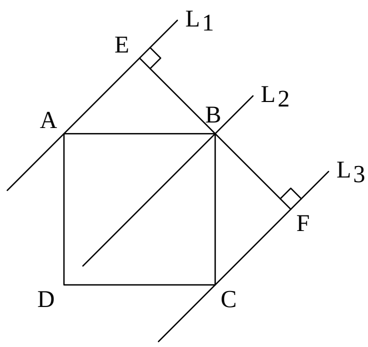
زمان برگزاری: بهمن ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عباداالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که $۱۱ \times ۵^{۳} = ۱۳۷۵$. چون بین اعداد زوج فقط مضربهای ۱۰ عامل ۵ دارند، پس بزرگترین عدد به‌کار رفته ۳۰ است.

۲. گزینه‌ی (د) صحیح است.
چون $۹x + ۵y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس $۲x + ۶y$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. پس $۵(۲x + ۶y)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و بنابراین، $k \overset{۱۱}{\equiv} ۳۰$. پس $k = ۸$.

۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
از B خطی عمود بر خطهای موازی رسم کنید تا $L_۱$ را در E و $L_۳$ را در F قطع کند.



در این‌صورت، مثلث AEB با مثلث BFC همنهشت است. پس $AE = BF = ۵$. بنابراین،

$$AB^{۲} = AE^{۲} + BF^{۲} = ۵^{۲} + ۷^{۲} = ۷۴$$

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
با کم کردن دو معادله از یکدیگر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} ۲۴ &= x + y^{۲} - x^{۲} - y \\ &= (y - x)(y + x - ۱) \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر $y-x$ زوج باشد، $(y+x-۱)$ فرد است و اگر $y-x$ فرد باشد، $(y+x-۱)$ زوج است. پس فقط حالتهای زیر امکان دارد:

$$\begin{cases} y-x=۱ \\ y+x-۱=۲۴ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y-x=۳ \\ y+x-۱=۸ \end{cases}$$

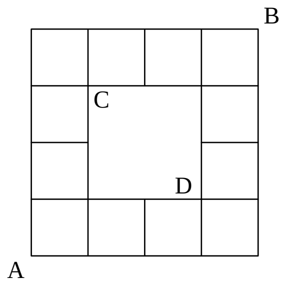
بنابراین، $(x,y,z)=(۱۲,۱۳,۵۷)$ یا $(x,y,z)=(۳,۶,-۸۵)$.

۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
به‌سادگی می‌توان دید که مثلثهای AEF ، BGH و CKL با مثلث ABC متشابه‌اند و نسبتهای تشابه نیز اعداد $\frac{p-a}{p}$، $\frac{p-b}{p}$ و $\frac{p-c}{p}$ هستند. چون

$$\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}=۱$$

پس $r_a+r_b+r_c=r$ و از آنجا $r-r_a=r_b+r_c$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
برای رفتن از A به B اگر از C بگذریم تعداد راههای ممکن ۱۶ (۴×۴) است (از A به C چهار راه و از C به B نیز چهار راه).



به‌همین ترتیب، اگر از D نیز بگذریم ۱۶ راه وجود دارد. امّا دو مسیر نیز وجود دارند که از هیچ‌کدام از D و C نمی‌گذرند (روی مرز مربع بزرگتر). پس تعداد کل حالتها ۳۴ حالت است.

۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
n_k را تعداد عددهای k رقمی می‌گیریم که با مقلوب خود برابرند. برای اینکه n عددی k رقمی باشد که با مقلوب خود برابر است، رقم یکان آن نباید صفر باشد. اکنون توجه کنید که

اگر $k=۱$ آنگاه $n_۱=۹$

اگر $k=۲l+۱,\ l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l}$

اگر $k=۲l,\ l\geq ۱$ آنگاه $n_k=۹\times ۱۰^{l-۱}$

پس

$$n_۱+n_۲+n_۳+n_۴+n_۵=۹+۹+۹۰+۹۰+۹۰۰=۱۰۹۸$$

۸. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
فرض کنید معادله دو ریشه‌ی حقیقی مانند $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} ۰ &\leq \frac{۴a+۳b+۲c}{a} \\ &= ۴+۳\frac{b}{a}+۲\frac{c}{a} \\ &= ۲x_۱x_۲-۳(x_۱+x_۲)+۴ \\ &= (x_۱-۱)(x_۲-۲)+(x_۱-۲)(x_۲-۱) \end{aligned}$$

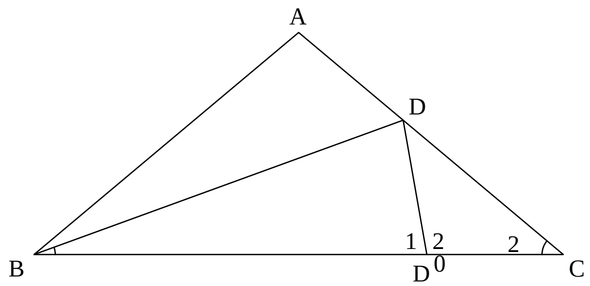
پس هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازه‌ی $(۱,۲)$ باشند.

۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
با حل نامعادله‌های $\sqrt{۱۲۳+r^۲}<r+۳$ و $\sqrt{۱۲۳+s^۲}>s+۴$ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که $r=۲۰$ و $s=۱۳$. پس $r+s=۳۳$.

۱۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
چون BD نیمساز زاویه‌ی B است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{AB}$$

اگر D' را روی BC چنان انتخاب کنیم که $BD=BD'$،



آنگاه $AD=D'C$ و رابطه‌ی بالا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{DC}{BC}=\frac{D'C}{AC}$$

و چون دو مثلث $DD'C$ و ABC در زاویه C نیز مشترک‌اند پس با هم متشابه‌اند. بنابراین، مثلث $DD'C$ متساوی‌الساقین است. پس، اگر زاویه‌ی C برابر ۲α باشد، چون $\angle DD'C$ زاویه‌ی خارجی مثلث $DD'C$ است نتیجه می‌شود $\angle DD'C=۴\alpha$. همچنین چون مثلث $BD'D$ متساوی‌الساقین است می‌توانیم بنویسیم

$$۱۸۰^\circ=\alpha+۴\alpha+۴\alpha=۹\alpha$$

و درنتیجه $\alpha=۲۰^\circ$. بنابراین،

$$\angle A=۱۸۰^\circ-۴\alpha=۱۰۰^\circ$$

۱۱. گزینه‌ی (د) صحیح است.
اگر نقطه‌ی تقاطع BM و CD را E بنامیم، روشن است که مثلثهای قائم‌الزاویه‌ی EBC و EMC همنهشت‌اند. پس $BC = MC$ و درنتیجه، $AC = ۲BC$.
اگر $\angle C$ برابر با α باشد، $\angle A = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ و بنابراین،

$$\sin A = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

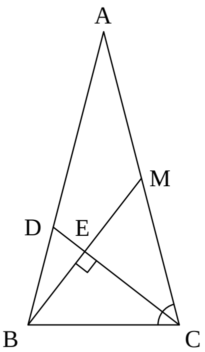
پس از قضیه سینوسها

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$$

نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{۲}$$

و بنابراین، $\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$ یا $\sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$.



۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
توجه کنید که می‌توانیم بنویسیم

$$a = mc + r, \quad b = nc + r, \quad a = lb + ۲r$$

که m، n و l عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. چون $a < ۲b$، نتیجه می‌شود $l = ۰$ یا $l = ۱$.
اگر $l = ۰$، نتیجه می‌شود $a = ۲r$ و درنتیجه $mc = r$. اما $۰ \leq r < c$. پس $m = ۰$ بنابراین، $r = ۰$. پس $a = ۰$ که تناقض است. اگر $l = ۱$، نتیجه می‌شود $a = b + ۲r$ و درنتیجه، $b = a - ۲r$. بنابراین،

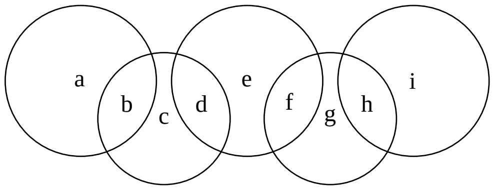
$$\frac{a+b}{۲} = \frac{a + a - ۲r}{۲} = a - r = mc$$

یعنی $\frac{a+b}{۲}$ بر c بخش‌پذیر است. اما $\frac{a+b}{۳}$ لزوماً بر c بخش‌پذیر نیست. در واقع از

$$\frac{a+b}{۳} = \frac{۲a - ۲r}{۳} = \frac{۲(a-r)}{۳} = \frac{۲mc}{۳}$$

نتیجه می‌شود که اگر $\frac{a+b}{۳}$ بر c بخش‌پذیر باشد، m باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس لزوماً $a \geq ۳c$ و $b \geq ۳c$. اما مثال $a = ۱۵$، $b = ۹$ و $c = ۶$ نشان می‌دهد که این روابط لزوماً برقرار نیستند.

۱۳. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض می‌کنیم اعداد مطابق شکل قرار داده شده باشند و مقدار مشترک را N می‌نامیم.



می‌توانیم بنویسیم

$$N = a + b = h + i$$

بنابراین،

$$۲N \leq ۶ + ۹ + ۷ + ۸ = ۲ \times ۳۰$$

و درنتیجه، $N \leq ۱۵$. امّا اگر $N = ۱۵$، آنگاه

$$\{a, b, h, i\} = \{۹, ۸, ۷, ۶\}$$

و درنتیجه با استفاده از دایره‌ی وسط،

$$N = d + e + f \leq ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$$

که تناقض است. پس $N \leq ۱۴$. مقادیر زیر نشان می‌دهد که $N = ۱۴$ ممکن است.

$$a = ۵,\ b = ۹,\ c = ۲,\ d = ۳,\ e = ۴,\ f = ۷,\ g = ۱,\ h = ۶,\ i = ۸$$

۱۴. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که

$$S = \frac{(۲-۱)\left(۲^۲+۲+۱\right)(۳-۱)\left(۳^۳+۳+۱\right)\cdots(۱۰۰-۱)\left(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱\right)}{(۲+۱)(۲^۲-۲+۲)(۳+۱)(۳^۳-۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۱۰۰^۲-۱۰۰+۱)}$$

اما چون

$$((n + ۲) - ۱) = n + ۱$$

و

$$(n + ۱)^۲ - (n + ۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$$

نتیجه می‌شود

$$S = \frac{(۲ - ۱)(۳ - ۱)(۱۰۰^۲ + ۱۰۰ + ۱)}{(۲^۲ - ۲ + ۱)(۹۹ + ۱)(۱۰۰ + ۱)} = \frac{۱۰۱۰۱}{۱۵۱۵۰} \simeq ۰/۶۶۶۷۳$$

۱۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
ثابت می‌کنیم معادله‌ی

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{n}$$

در مجموعه‌ی اعداد طبیعی جواب منحصربه‌فرد دارد اگر و فقط اگر n عددی اول باشد. فرض کنید p عددی اول باشد. در این‌صورت معادله‌ی

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y} = \frac{۱}{p}$$

را می‌توانیم به‌صورت

$$x = \frac{yp}{y+p}$$

بنویسیم. در این‌صورت،

$$yp = x(y+p)$$

پس $x(y+p)$ عامل p دارد. اما اگر $x = kp$، آنگاه $y = k(y+p)$ که ناممکن است. پس $y+p = kp$. پس $y = p(k-۱)$. بنابراین،

$$x = \frac{p^۲(k-۱)}{pk} = \frac{p(k-۱)}{k}$$

اما چون $k > ۱$، نتیجه می‌شود $k = p$. بنابراین $y = p(p-۱)$ و $x = p-۱$ جواب منحصربه‌فرد معادله است.

از طرف دیگر، اگر $p > ۱$، $q > ۱$ و $n = pq$، آنگاه معادله دارای دو جواب متمایز

$$x = n-۱, \quad y = n(n-۱)$$

و

$$x = p(q-۱), \quad y = pq(q-۱)$$

است. توجه کنید هیچ‌کدام از اعداد داده شده اول نیست.

۱۶. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که اعداد $i + ۲۵j$ $(j = ۰, ۱, \ldots, ۲۴)$ را در ستون i ام چیده‌ایم. حال اگر اعداد را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند، ۲۵ عدد به‌صورت $i + ۲۵j$ با i و jهای متمایز داریم. پس مجموع این عددها برابر است با

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۲۵ + (۰ \times ۲۵ + ۱ \times ۲۵ + \cdots + ۲۴ \times ۲۵)$$

که عبارت فوق برابر است با

$$\frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲} + ۲۵ \times \frac{۲۴(۲۴+۱)}{۲} = \frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$$

۱۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.
روشن است که $P(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. فرض کنید

$$h(x) = \frac{P(x)}{x-۲} = b_{n-۱}x^{n-۱} + b_{n-۲}x^{n-۲} + \cdots + b_۰$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $۰ \leq k \leq n$، آنگاه

$$b_k - ۲b_{k+۱} = a_{k+۱}$$

و $a_۰ = -۲b_۰$. توجه کنید که $h(۱) = -P(۱) = ۰$. پس

$$b_{n-۱} + b_{n-۲} + \cdots + b_۰ = ۰$$

همه‌ی ضرایب b_i نمی‌توانند هم‌علامت باشند. پس دست‌کم یکی از این ضرایب بزرگ‌تر از یا مساوی با ۱ است. اگر $b_۰ \geq ۱$، آنگاه $a_۰ \leq -۲$. اگر $b_۰ < ۱$، فرض کنید k کوچکترین عدد طبیعی باشد که $b_k \geq ۱$،

$$b_j \leq ۰, \quad j = ۰, ۱, \ldots, k-۱$$

در این‌صورت،

$$a_k = b_{k-۱} - ۲k_k \leq -۲$$

پس دست‌کم یکی از ضرایب $P(x)$ کوچکتر از یا مساوی با ۲‌- است.

۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که اگر $t = ۰$ و $t = ۱$، آنگاه از $(x, y) \in C_t$ نتیجه می‌شود،

$$yt + (۱-t)x \geq (۱-t)t, \quad ۰ \leq x, y \leq ۱$$

و درنتیجه،

$$y \geq \frac{t-۱}{t}x + ۱ - t = ۱ + x - \frac{x}{t} - t$$

توجه کنید که در مجموعه‌ی S، به‌ازای $t \in (۰, ۱)$،

$$\frac{x}{t} + t \leq ۲\sqrt{x}$$

بنابراین،

$$y \geq ۱ + x - ۲\sqrt{x} = (۱ - \sqrt{x})^۲$$

و درنتیجه، $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱$. چون $C_۰ = C_۱ = S$، نتیجه می‌شود

$$A \subseteq S \cap \{(x,y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\}$$

از طرف دیگر، به آسانی می‌توانید دید که

$$S \cap \{(x,y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\} \subseteq A$$

درنتیجه

$$S \cap \{(x,y) | \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq ۱\} = A$$

۱۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
بردار $x_j = \left(\alpha_۱^j, \alpha_۲^j, \ldots, \alpha_{۱۰}^j\right)$ را به‌ازای $۱ \leq j \leq ۱۳۷۵$ چنین تعریف می‌کنیم: اگر توان P_i در حاصل‌ضرب $a_۱a_۲\ldots a_j$ برابر r باشد و $r \overset{۲}{\equiv} s$ که $s \in \{۰, ۱\}$، قرار می‌دهیم $\alpha_j^j = s$. روشن است که α_i^j ($۱ \leq i \leq ۱۰$، $۱ \leq j \leq ۱۳۷۵$) یا ۰ است یا ۱.

پس تعداد بردارهای x_j متمایز حداکثر $۲^{۱۰}$، یعنی ۱۰۲۴ است. پس بین $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{۱۳۷۵}$ دست‌کم دو بردار مانند x_l و x_k $(k < l)$ برابرند. پس به‌ازای $۱ \leq i \leq ۱۰$، اگر تعداد P_i بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_l زوج باشد تعداد P_i ها بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k و بنابراین $a_{k+۱}$، $a_{k+۲}$، ...، a_l نیز زوج است. اگر تعداد P_i ها بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_l فرد باشد، تعداد P_i بین $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k نیز فرد و بنابراین بین $a_{k+۱}$، $a_{k+۲}$، ...، a_l زوج است. پس $a_{k+۱}a_{k+۱}\ldots a_l$ مربع کامل است.

۲۰. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید $O(n)$ نشان‌دهنده‌ی بزرگترین عدد صحیح k باشد که $۲^k|n$. توجه کنید که

$$A = \frac{۹^{۴n} - ۱}{۸}$$

و همچنین،

$$۹^{۲^{t+۱}\cdot s} - ۱ = \left(۹^{۲^t\cdot s} - ۱\right)\left(۹^{۲^t\cdots} + ۱\right)$$

چون $۹^{۲^t\cdot s} + ۱$ عددی به‌صورت $۴k + ۲$ است، نتیجه می‌شود

$$O\left(۹^{۲^{t+۱}\cdot s} - ۱\right) = O\left(۹^{۲^t\cdot s} - ۱\right) + ۱$$

حال اگر s عدد فردی باشد،

$$O\left(۹^s - ۱\right) = ۳$$

و بنابراین،

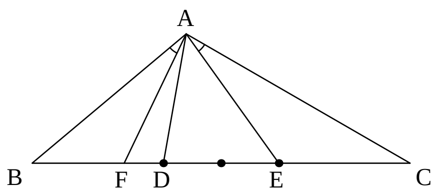
$$O\left(\frac{۹^{۲^{۱۳۷۵+۲}\cdot s} - ۱}{۸}\right) = ۱۳۷۷$$

۲۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
دقت کنید که برای هر عدد حقیقی x داریم،

$$x^۲ - \left(x - \frac{۱}{۲}\right) = \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۴}$$

پس $x^۲ > x - \frac{۱}{۲}$ و با توجه به این که اگر $f\left(x - \frac{۱}{۲}\right) = ۰$، آنگاه $f\left(x^۲\right) = ۰$ نتیجه می‌شود که اگر f یک ریشه داشته باشد بینهایت ریشه برای آن پیدا می‌شود. بنابراین f ریشه ندارد و درنتیجه، $g(x)$ همواره مثبت است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
فرض کنید $\angle BAF = \alpha$.



در مثلث ABF می‌توانیم بنویسیم،

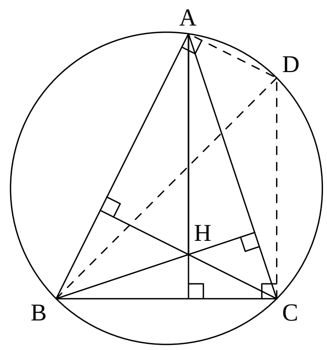
$$\frac{BF}{AF} = \frac{\sin\alpha}{\sin B}$$

در مثلث AEC می‌توانیم بنویسیم،

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\sin\alpha}{\sin C}$$

پس
$$\frac{BF}{EC} = \frac{AF}{AE} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AF}{AE} \cdot \frac{c}{b} \tag{۱}$$
همچنین، در مثلث ABE نیز به‌طور مشابه داریم،
$$\frac{BE}{AE} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin B}$$
و در مثلث ACF می‌توانیم بنویسیم
$$\frac{FC}{AF} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin C}$$
پس
$$\frac{BE}{FC} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{c}{b} \tag{۲}$$
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود،
$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{BE}{EC} = \frac{c^۲}{b^۲}$$
اما چون $BD = EC$ و $BE = CD$، خواهیم داشت،
$$\frac{BE}{EC} = \frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$$
و بنابراین،
$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^۳}{b^۳}$$

۲۳. گزینه‌ی (د) صحیح است.
در نقطه‌ی C خطی بر BC عمود می‌کنیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را در D قطع کند.



روشن است که BD قطر دایره است و بنابراین، $\angle BAD = ۹۰^\circ$.

پس، $CH \| DA$ و $CD \| AH$. یعنی چهار ضلعی $AHCD$ متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه، $AH = CD$ همچنین، $BC = AH$ و بنابراین، در مثلث BCD زاویه‌ی BDC برابر ۴۵° است. چون $\angle BAC = \angle BDC$، نتیجه می‌گیریم که زاویه‌ی BDC برابر ۴۵°.

۲۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را درنظر بگیرید. به‌ازای هر یک از این عددها مانند j، حداکثر یکی از دو عدد j و $2j$ می‌توانند در مجموعه‌ی مورد نظر قرار داشته باشند، پس از دو زیرمجموعه‌ی

$$\{1,3,5,\ldots,99\},\quad \{2,4,6,\ldots,98\}$$

حداکثر $\left[\frac{99}{2}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. به‌همین ترتیب از دو مجموعه‌ی مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد، یعنی

$$\{4,12,20,28,\ldots,92\},\quad \{8,24,40,\ldots,88\}$$

حداکثر $\left[\frac{99}{8}\right]$ عدد در مجموعه‌ی مورد نظر قرار دارند. با ادامه‌ی این استدلال نتیجه می‌شود که حداکثر تعداد عضوهای مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با

$$\left[\frac{99}{2}\right]+\left[\frac{99}{8}\right]\left[\frac{99}{32}\right]+\left[\frac{99}{64}\right]=66$$

۲۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
نشان می‌دهیم هر دنباله‌ای با خاصیت بیان شده اکیداً صعودی است. در این‌صورت روشن است که $n_k \geq k$ و از رابطه‌ی $n_{k+1} > n_{n_k}$ نتیجه می‌شود که $k+1 > n_k$. درنتیجه، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $n_k = k$. برای اثبات اینکه $\{n_k\}$ دنباله‌ای صعودی است توجه می‌کنیم که n_1 از همه‌ی اعضای دنباله اکیداً کوچکتر است زیرا اگر عضو مینیمم دنباله α باشد و به‌ازای $k > 1$ داشته باشیم $n_k = \alpha$، آنگاه $n_{n_{k-1}} < \alpha$ که تناقض است. حال اگر n_1 را از دنباله حذف کنیم و دنباله‌ی جدید

$$n_2, n_3, \ldots$$

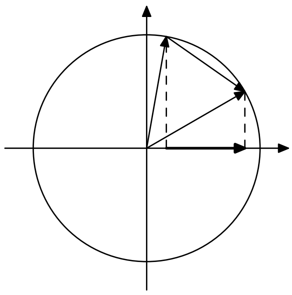
را درنظر بگیریم این دنباله نیز این خاصیت را دارد. بنابراین n_2 کوچکترین عضو آن است. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $\{n_k\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی است.

۲۶. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned}
S &= \textstyle\sum_{t=0}^{7} 2^t \sum_{i=1}^{8} \binom{i-1}{t}\\
&= \textstyle\sum_{t=0}^{7} \sum_{i=1}^{8} 2^t \binom{i-1}{t}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{8} \sum_{t=0}^{7} 2^t \binom{i-1}{t}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{8} 3^{i-1}\\
&= \frac{3^8-1}{2}\\
&= 3280
\end{aligned}$$

۲۷. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر جایگشتی که جای x_i و x_j را عوض می‌کند روی $\{x_i\}$ عمل کند $\prod_{1\leq i<j\leq 9}(x_i - x_j)$ قرینه می‌شود. اما اثر این جایگشت روی جملات بسط حاصل‌ضرب، جمله‌ی $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_9^4$ را ثابت نگاه می‌دارد. پس ضریب این جمله جمله‌ی صفر است. (در واقع همین استدلال نشان می‌دهد که درجمله‌های با ضریب ناصفر، هیچ دو توانی برابر نیستند).

۲۸. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
اگر بردارها را یک‌درمیان (مطابق شکل) از هم کم کنیم $|\vec{R}-\vec{B}|$ برابر مجموع بردارهای به‌دست آمده خواهد بود. امّا این بردارها پشت سر هم و مجزا هستند لذا مجموع آنها در واقع نقطه‌ای از دایره را به نقطه‌ای در درون یا روی دایره انتقال می‌دهد پس طول بردار $\vec{R}-\vec{B}$ کمتر از یا مساوی با قطر دایره، یعنی ۲ است.



۲۹. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید x نقطه‌ای باشد که کمترین تعداد نقاط در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° از آن قرار دارند (مثلاً k نقطه). هر کدام از این k نقطه خود k نقطه‌ی دیگر در فاصله‌ی کمتر یا مساوی ۱۲۰° دارند. همچنین، هر دو نقطه از $۲۴-k$ نقطه‌ی دیگر نیز در فاصله‌ای کمتر از ۱۲۰° از هم قرار دارند. پس تعداد کمانهای کمتر یا مساوی ۱۲۰° حداقل برابر است با

$$\binom{k+۱}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}=\frac{k^۲}{۲}+\binom{۲۴-k}{۲}+k$$

که کمترین مقدار آن به‌ازای $k=۱۲$ یا $k=۱۳$ برابر ۱۴۴ است. (۱۲ نقطه نزدیک یک قطب و ۱۳ نقطه نزدیک قطب دیگر، ۱۴۴ را به‌دست می‌دهند.)

۳۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
توجه کنید که

$$\angle BHC=\frac{\angle BC+\angle AD}{۲}=\angle BC$$

و چون $\angle BOC=\widehat{BC}$ پس $OHBC$ محاطی است و با استفاده از قضیه بطلمیوس داریم $y-x=ab$.