

# آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

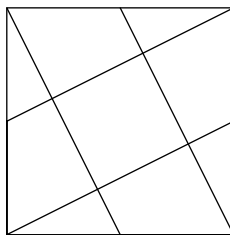
زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. معادله‌ی  $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$  دارای چند جواب است؟  
الف) جواب ندارد.      ب) یک جواب      ج) دو جواب  
د) تعداد متناهی جواب      ه) تعداد نامتناهی جواب

۲. رقم راست عدد  $23^{23} - 17^{17}$  برابر است با:  
الف) ۰      ب) ۲      ج) ۴      د) ۶      ه) ۸

۳. در شکل زیر فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک چقدر است؟  
الف)  $\frac{1}{4}$       ب)  $\frac{1}{5}$       ج)  $\frac{1}{6}$       د)  $\frac{1}{7}$       ه)  $\frac{1}{8}$



۴. حداقل چند عضو از مجموعه‌ی  $\{2, 3, \dots, 1375\}$  را حذف کنیم به طوری که مجموعه‌ی باقی مانده دارای این خاصیت باشد که حاصل ضرب هیچ یک از دو عضوش در خودش نباشد؟  
الف) ۱۶      ب) ۳۶      ج) ۵۶      د) ۷۶      ه) ۹۶

۵. فرض کنید مجموع  $n + 2 + 1$  یک عدد سه‌رقمی باشد که رقمهای آن مساوی‌اند. در این صورت  $n$  بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟  
الف) ۵      ب) ۶      ج) ۷      د) ۸      ه) ۱۱

۶. فرض کنید در مثلث  $ABC$ ،  $CH$  ارتفاع باشد و  $CH \geq AB$ . در این صورت بزرگترین مقدار زاویه‌ی  $C$  برابر است با:  
الف)  $30^\circ$       ب)  $45^\circ$       ج)  $60^\circ$       د)  $90^\circ$       ه)  $120^\circ$

۷. تعدادی متناهی وزنه داریم که وزن هر یک حداکثر ۱۰ کیلوگرم است. می‌دانیم که اگر این وزنه‌ها را به دلخواه به دو دسته تقسیم کنیم مجموع وزنه‌های یکی از دسته‌ها حداکثر ۱۰ کیلوگرم می‌شود. بیشترین وزن مجموع

# آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

وزنه‌ها چند کیلوگرم می‌تواند باشد؟

- الف) ۲۰ (ب) ۲۵ (ج) ۳۰ (د) ۳۵ (ه) ۴۰

۸. فرض کنید هر حرف لاتین نماینده‌ی یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقمهای آنها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم  $\frac{SIX}{NINE} = \frac{4}{7}$  در این صورت مقدار  $I$  برابر است با:

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۹. اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$$

در این صورت دقیق‌ترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت چیست؟

- الف)  $x = y = 0$  (ب)  $x + y = 0$  (ج)  $x + y \geq 0$  (د)  $x + y \leq 0$  (ه)  $x$  و  $y$  هم‌علامت‌اند.

۱۰. اگر  $0 < a < 1$  و  $b > 0$  در این صورت داریم

- الف)  $a^a b^b \geq a^b b^a$  (ب)  $a^\alpha b^{1-\alpha} < a + b$  (ج)  $a^a b^b \geq (ab)^{\frac{a+b+1}{4}}$  (د)  $(\alpha a + (1-\alpha)b)^2 \geq \alpha a^2 + (1-\alpha)b^2$  (ه) الف و ب و ج هر سه صحیح است.

۱۱. از نقطه‌ی  $O$  واقع در درون مثلث  $ABC$ ، عمودهای  $OM$ ،  $ON$  و  $OP$  را به ترتیب بر اضلاع  $BC$ ،  $AC$  و  $AB$  رسم می‌کنیم. اگر  $AM = 3$ ،  $MB = 5$ ،  $BN = 4$ ،  $NC = 2$  و  $CP = 4$  در این صورت مقدار  $AP$  برابر است با:

- الف) ۳ (ب)  $2\sqrt{2}$  (ج) ۴ (د)  $2\sqrt{3}$  (ه)  $2\sqrt{2}$

۱۲. نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط واقع‌اند و  $B$  نقطه‌ای میان  $A$  و  $C$  است. تمام دایره‌های گذرا از نقاط  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم و از  $C$  مماسهایی بر آنها رسم می‌کنیم. در این صورت مکان هندسی نقاط تماس برابر است با:

- الف) یک خط راست (ب) یک دایره (ج) یک نیم‌دایره (د) یک بیضی (ه) هیچ‌کدام

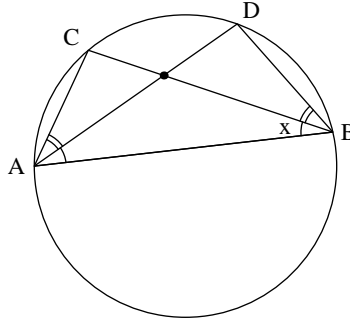
۱۳. معادله‌ی  $3^y + 1 = 2^x$  در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

- الف) ۱ جواب (ب) ۲ جواب (ج) ۳ جواب (د) ۴ جواب (ه) نامتناهی جواب

۱۴. مثلث  $ABC$  محاط در داخل دایره‌ی  $C$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  باشد. اگر  $AB = \sqrt{6}BC = \sqrt{6}AD$  در این صورت زوایای مثلث  $ABC$  برابرند با:

- الف)  $15^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $135^\circ$  (ب)  $30^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $90^\circ$  (ج)  $45^\circ$ ،  $45^\circ$ ،  $90^\circ$  (د)  $20^\circ$ ،  $40^\circ$ ،  $120^\circ$  (ه)  $15^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $105^\circ$

# آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور



۱۵. فرض کنید  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی بوده به طوری که  $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$  عددی طبیعی باشد. در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک  $a$  و  $b$  از کدام یک از اعداد زیر بزرگتر نیست (بهترین جواب ممکن مورد نظر است)؟

(الف)  $\sqrt{a+b}$       (ب)  $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$       (ج)  $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}}$       (د)  $\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2b}}{2}$   
 (ه)  $\sqrt{a+b} - 1$

۱۶. فرض کنید  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد باشند به طوری که  $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 13\alpha = 1$  و  $\beta^3 - 6\beta^2 + 13\beta = 19$ . در این صورت مقدار  $\alpha + \beta$  برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟

(الف) ۳      (ب) ۴      (ج) ۵      (د) ۶      (ه) ۷

۱۷. عدد  $a$  را متعادل گوئیم هرگاه بتوان رقمهای آن را به دو دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع رقمهای دو دسته مساوی باشد. کوچکترین عدد  $a$ ، به طوری که  $a + 1$  و  $a$  متعادل باشند در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرند؟

(الف)  $[100, 200]$       (ب)  $[200, 300]$       (ج)  $[300, 400]$       (د)  $[400, 500]$       (ه)  $[500, 600]$

۱۸. در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $M$  را روی  $BC$  در نظر می‌گیریم و از  $M$  خطوطی موازی اضلاع  $AB$  و  $AC$  رسم می‌کنیم. فرض کنید مساحت متوازی الاضلاع حاصل  $\frac{5}{18}$  مساحت مثلث شود. در این صورت نقطه‌ی  $M$  ضلع  $BC$  را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

(الف) ۱ به ۶      (ب) ۱ به ۴      (ج) ۱ به ۵      (د) ۲ به ۹      (ه) ۱ به ۳

۱۹. یک کره به وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

(الف)  $2^9$       (ب)  $2^8$       (ج) ۷۶      (د) ۸۱      (ه) ۷۴

۲۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای  $ABH$  و  $ACH$  به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشند آنگاه شعاع دایره محاطی مثلث  $ABC$  برابر است با:

(الف) ۵      (ب)  $\sqrt{10}$       (ج)  $2\sqrt{2}$       (د)  $4\sqrt{5}$       (ه) ۳

۲۱. فرض کنید  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، و به ازای  $1 \leq x \leq 0$  داشته باشیم،  $|f(x)| \leq 1$ . در این صورت ماکزیمم مقدار  $2a + b$  چه می‌تواند باشد؟

(الف) ۶      (ب) ۷      (ج) ۸      (د) ۹      (ه) ۱۰

۲۲. مجموع تمام اعداد مثبت  $x$  را بیابید به طوری که عبارت  $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$  به ازای آنها عددی صحیح شود.

## آزمون مرحله‌ی اول چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

---

$$\begin{array}{lll} \text{الف) } \sqrt{2} & \text{ب) } \sqrt[3]{4} & \text{ج) } \sqrt{5} \\ \text{د) } \sqrt{5} \left( 1 + \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \right) & \text{ه) } \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3}} \end{array}$$

۲۳. حداقل چند نقطه باید در صفحه در نظر گرفت به طوری که هر نقطه‌ی صفحه لااقل از یکی از این نقاط فاصله‌اش گنگ باشد.

الف) ۲ نقطه      ب) ۳ نقطه      ج) ۴ نقطه      د) ۵ نقطه  
 ه) با تعدادی متناهی نقطه نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۴. فرض کنید  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 3}$ . در این صورت مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \dots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

الف) ۷      ب) ۸۰۵      ج) ۶۰۵      د) ۴۰۵      ه) ۵۰۵

۲۵. تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید به طوری که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقمهای آنها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار آمده باشد. (مثال:  $۰ + ۱ + ۵۲ + ۳ + ۴ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۹۰$ )

الف) ۷      ب) ۱۱      ج) ۱۵      د) ۱۹      ه) ۲۳