راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: آبان ۱۳۷۴

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\angle HPE &= \angle PAH + \angle PHA \\
&= \angle EFH + \angle PHA \\
&= \angle FHA + \angle PHA \\
&= ۲\angle FHA \\
&= ۲\angle FBA \\
&= ۴۰^\circ
\end{aligned}$$

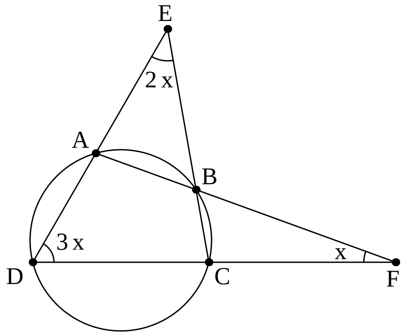
۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
چون $۵^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$، پس $۵^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱$ و بنابراین، $۵^{۲۲} + ۷$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
با توجه به فرض،

$$\begin{aligned}
(r+۱)(r+۲)(r-۴) &= (r^{۲}+۳r+۲)(r-۴) \\
&= (r+۱۰+۳r+۲)(r-۴) \\
&= ۴(r+۳)(r-۴) \\
&= ۴(r^{۲}-r-۱۲) \\
&= ۴(r+۱۰-r-۱۲) \\
&= -۸
\end{aligned}$$

۴. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
طول مستطیل کوچک را با x و عرض آن را با y نشان دهید. در این‌صورت $۳x = ۴y$؛ اما چون مساحت مستطیل $ABCD$ برابر ۳۳۶ است، پس مساحت مستطیل کوچکتر برابر $۴۸ = \frac{۳۳۶}{۷}$ است. پس $xy = ۴۸$، یا $\frac{۳}{۴}y.y = ۴۸$. درنتیجه، $x = ۶$ و $y = ۸$ پس محیط مستطیل برابر ۷۶ خواهد بود.

۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.



با توجه به شکل،

$$\begin{array}{rcccl} \angle ECD & = & ۱۸۰^\circ - \angle ECF & = & ۱۸۰^\circ - ۵x \\ \angle DAB & = & ۱۸۰^\circ - \angle BAE & = & ۱۸۰^\circ - ۴x \\ \angle ABC & = & \angle BAE + \angle AEB & = & ۶x \end{array}$$

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ مجموع زوایه‌های روبه‌رو برابر ۱۸۰° است. پس،

$$۱۸۰^\circ - ۴x + ۱۸۰^\circ - ۵x = ۶x + ۳x$$

و درنتیجه، $x = ۲۰^\circ$.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر x تعداد جوابهای مثبت و y تعداد جوابهای منفی باشد، آنگاه $۷x - ۲y = ۸۷$ و $x + y \leq ۲۰$. توجه کنید که x و y صحیح و نامنفی‌اند. به‌سادگی می‌توان دید که $x = ۱۳$ و $y = ۲$ تنها جواب مسأله است پس دانش‌آموز با این شرایط، به ۵ سوال پاسخ نداده است.

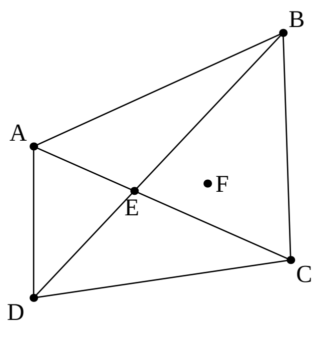
۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.
چهار ضلعی محدب $ABCD$ و نقطه‌ی F را در صفحه‌ی آن درنظر بگیرید. محل برخورد قطرهای چهارضلعی را E بنامید. در این‌صورت، روشن است که

$$FA + FC \geq AC, \quad FB + FD \geq BD$$

بنابراین،

$$FA + FB + FC + FD \geq AC + BD$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $F = E$.



۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
فرض کنید عدد مورد نظر هم برابر با

$$n + (n + ۱) + \cdots + (n + ۸) = ۹n + ۳۶$$

و هم برابر با

$$m + (m + ۱) + \cdots + (m + ۹) = ۱۰m + ۴۵$$

باشد (n و m عددهای طبیعی‌اند). در این‌صورت،

$$۹n + ۳۶ = ۱۰m + ۴۵$$

یا

$$۹n - ۱۰m = ۹$$

یا

$$۱۰m = ۹(n - ۱)$$

پس $۹|۱۰m$، اما $۱۰ \nmid ۹$. پس m مضربی از ۹ است. پس عدد مطلوب برابر است با

$$۱۰ \times ۹ + ۴۵ = ۱۳۵$$

۹. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
از فرض نتیجه می‌شود که

$$n + ۱ = (x + ۱)(y + ۱)$$

پس اگر $n + ۱$ عددی اول نباشد، معادله جواب دارد. بین گزینه‌های داده شده فقط در گزینه‌ی (الف)، $n + ۱ = ۱۰۱$ عددی اول است.

۱۰. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
روشن است که،

$$\begin{aligned} \angle A + \angle C &= \tfrac{۱}{۲}\left(\widehat{AB} + \widehat{AD}\right) + \tfrac{۱}{۲}\left(\widehat{BC} + \widehat{CD}\right) \\ &= \tfrac{۱}{۲}\left(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}\right) \end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\angle B + \angle D = \frac{۱}{۲}\left(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}\right)$$

پس،

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰ \Longrightarrow \angle A + \angle C = ۱۸۰$$

پس چهار ضلعی محاطی است.

۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
چند جمله‌ایی مانند $A(x)$ وجود دارد که

$$F(x) = G(x)A(x) + B(x), \quad \deg B < \deg G$$

فرض کنید $B(x)$ متحد با صفر نباشد. در این‌صورت،

$$\frac{F(x)}{G(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{G(x)}$$

چون درجه‌ی B از درجه‌ی G کمتر است، وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند $\frac{B(x)}{G(x)}$ به صفر میل می‌کند. پس برای اعداد طبیعی به اندازه‌ی کافی بزرگ، این کسر عددی صحیح نمی‌شود.

۱۲. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
اگر مساحت شکل $\triangle$ را با $[\triangle]$ نشان دهیم، به سادگی می‌توان ثابت کرد که مثلثهای AMN، NCP و MBP متساوی‌اند و $NP = ۲PC = \frac{۱}{۲}BC$.

$$\frac{[MPC]}{[ABC]} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۹}$$

بنابراین،

$$[AMN] + [MBP] + [NPC] = \frac{۶}{۹}\,[ABC]$$

پس،

$$[MNP] = \frac{۱}{۳}[ABC]$$

۱۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
به روش معمول چندجمله‌ای، $ax^۳ + bx + c$ را بر $x^۲ + tx + ۱$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} ax^۳ + bx + c \quad &= \quad (ax - at)\,(x^۲ + tx + ۱) \\ &\quad + (at^۲ + b - a)\,x + (at + c) \end{aligned}$$

چون بنابر فرض، $(at^۲ + b - a)\,x + (at + c) = ۰$. پس،

$$at^۲ + b - a = ۰, \quad at + c = ۰$$

از رابطه‌ی دوم نتیجه می‌شود $t = \frac{-c}{a}$ و سپس از رابطه‌ی اول نتیجه می‌شود

$$a\left(\frac{-c}{a}\right)^۲ = a - b$$

و درنتیجه، $c^۲ = a^۲ - ab$.

۱۴. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
توجه کنید S یا ۳ است یا ۴. اگر $S = ۴$،

$$U + S + S = U + ۸$$

و چون رقم یکان این مجموع ۶ است، $U = ۸$ که به تناقض $S = ۳$ منجر می‌شود. پس $S = ۳$ در این‌صورت،

$$U + S + S = U + ۶$$

پس U فقط می‌تواند ۸ یا ۹ باشد تا «نقلی» حاصل از موضع صدگان برابر با ۱۰ شود و ۸ بین گزینه‌ها نیست.

۱۵. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
به آسانی می‌توانید ثابت کنید که فقط دو دسته صفحه با شرایط مطلوب وجود دارند:

الف) سه رأس در یک طرف و یک رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر سه رأسی از چهار وجهی که انتخاب کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحات برابر است با

$$\binom{۴}{۳} = ۴$$

ب) دو رأس در یک طرف و دو رأس در طرف دیگر صفحه است و به‌ازای هر دو رأسی از چهار وجهی که انتخاب می‌کنیم فقط یک صفحه از این نوع وجود دارد. پس تعداد این صفحه‌ها برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۲} = ۳$$

بنابراین تعداد کل صفحه‌هایی که از چهار رأس به یک فاصله‌اند $۳ + ۴$ است.

۱۶. گزینه‌ی (د) صحیح است.
توجه کنید که

$$\begin{aligned}
& c^۴ - ۲\left(a^۲ + b^۲\right) c^۲ + a^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ \\
&= \left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲\right)\right)^۲ - \left(a^۲ + b^۲\right)^۲ + \left(a^۲ + b^۲\right)^۲ - a^۲b^۲ \\
&= \left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲ - ab\right)\right)\left(c^۲ - \left(a^۲ + b^۲ + ab\right)\right) \\
&= ۰
\end{aligned}$$

پس

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ + ab \quad \text{یا} \quad c^۲ = a^۲ + b^۲ - ab$$

پس بنابر قضیه‌ی کسینوسها، $\cos C = \pm\frac{۱}{۲}$. بنابراین، $C = ۶۰^\circ$ یا $C = ۱۲۰^\circ$.

۱۷. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
این عدد به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۳$ مربع کامل است. و به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۴$ مربع کامل نیست. به‌ازای $n \geq ۵$ رقم یکان این عدد ۳ است و درنتیجه مربع کامل نیست.

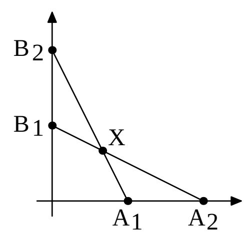
۱۸. گزینه‌ی (د) صحیح است.
در اینجا باید مساحت را به‌عنوان مساحت جهت‌دار تعبیر کنیم و می‌دانیم که اگر σ مساحت جهت‌دار $PQRS$ را نشان دهد، آن‌گاه $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS} = \sigma\vec{\mathbf{n}}$ که $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه است. پس M دارای خاصیت مسأله است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BM}$ و یا معادلاً $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{MN} = ۰$ که N وسط پاره‌خط BD است. پس مکان M خطی به موازات AC است.

۱۹. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
با ۱۰ خط به آسانی می‌توان همه‌ی نقطه‌ها را پوشاند. این کار با کمتر از ۱۰ خط ممکن نیست. توجه کنید که هر خط حداکثر ۱۰ نقطه را می‌پوشاند. وقتی یک خط رسم شود، هر خط دیگر حداکثر ۹ نقطه‌ی دیگر را می‌پوشاند و با استدلال مشابه دیده می‌شود که i خط حداکثر

$$۱۰ + ۹ + \cdots + (۱۱ - i)$$

نقطه را می‌پوشانند. چون تعداد نقطه‌ها ۵۵ است، $i \geq ۱۰$.

۲۰. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
با انتخاب دو نقطه روی محور xها و دو نقطه روی محور yها دقیقاً یک نقطه‌ی تقاطع به‌دست می‌آید.



با توجه به فرض مسأله، نقطه‌های تقاطع به‌دست آمده دوبه‌دو متمایزند. پس مجموعاً $\binom{۲۰}{۲}^{۲} = ۳۶۱۰۰$ نقطه‌ی تقاطع به‌دست می‌آید.

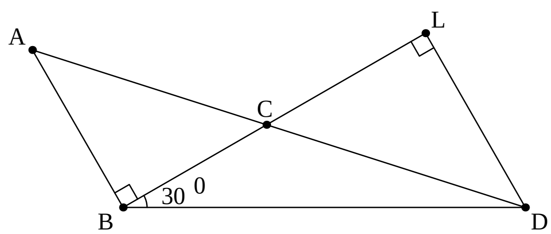
۲۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
مجموعه‌ی $A = \{۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶\}$ دارای خاصیت مسأله است. هیچ مجموعه‌ی ۱۲ عضوی با خاصیت موردنظر وجود ندارد. توجه کنید که در مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۶ هفت عدد غیرمرکب وجود دارد (شش عدد اول و عدد ۱). هر مجموعه‌ی ۱۲ عضوی باید شامل دست کم سه تا از این هفت عدد باشد بنابراین دارای سه عدد دوبه‌دو نسبت به هم اول است.

۲۲. گزینه‌ی (ج) صحیح است.
قرار دهید $x = \cos C$ در این‌صورت، چون $C < ۹۰^\circ$، پس $۰ < x < ۱$. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{a}{b} &= \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin ۳C}{\sin ۲C} = \frac{۳\sin C - ۴\sin^۳ C}{۲\sin C\cos C}\\ &= \frac{۳-۴\sin^۲ C}{۲\cos C} = \frac{۳-۴(۱-x^۲)}{۲x} = \frac{۴x^۲-۱}{۲x}\\ &= ۲x - \frac{۱}{۲x} < \frac{۳}{۲}\end{aligned}$$

و در ضمن وقتی $x \to ۱$ و یا $C \to ۰$، مقدار λ به $\frac{۳}{۲}$ نزدیک می‌شود.

۲۳. گزینه‌ی (ه) صحیح است.
قرار می‌دهیم، $BD = x$. در شکل زیر دو مثلث CDL و ABC متشابه‌اند.



چون زاویه B برابر ۳۰° است پس داریم $LD = \frac{x}{۲}$ و درنتیجه $AC = \frac{۲}{x}$. حال بنابر قانون کسینوسها در مثلث ABD داریم

$$۱ + x^۲ - ۲x\cos ۱۲۰^\circ = (۱ + \frac{۲}{x})^۲$$

پس،
$$x^{۴} + x^{۳} = ۴(x + ۱)$$
و درنتیجه $x = \sqrt[۳]{۴}$ و $AC = \frac{۲}{x} = \sqrt[۳]{۲}$.

۲۴. گزینه‌ی (ب) صحیح است.
بنابر فرض،
$$\frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۲bc} + \frac{c^{۲} + a^{۲} - b^{۲}}{۲ac} + \frac{a^{۲} + b^{۲} - c^{۲}}{۲ab} = ۱$$
پس
$$ab^{۲} + ac^{۲} + ba^{۲} + bc^{۲} + ca^{۲} + cb^{۲} - (a^{۳} + b^{۳} + c^{۳}) = ۲abc$$
و درنتیجه،
$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = ۰$$
پس یکی از سه حالت $a + b = c$، $a + c = b$ یا $b + c = a$ اتفاق می‌افتد. فرض کنید $a + b = c$. در این‌صورت از سه کسر فوق دو تا برابر ۱+ و یکی برابر ۱− خواهد شد. پس برای تمام nهای فرد تساوی برقرار است.

۲۵. گزینه‌ی (الف) صحیح است.
توجه کنید که $۳۷۱ = ۳^{۳} + ۷^{۳} + ۱^{۳}$. پس
$$۳۷۰ = ۳^{۳} + ۷^{۳} + ۰^{۳}$$
بنابراین، عدد دیگر ۳۷۰ است و در بازه‌ی $[۳۰۰, ۴۰۰]$ قرار دارد.